

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

18 ΜΑΪΟΥ 2016

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 262.

A2. Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 141.

A3. Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελίδα 246.


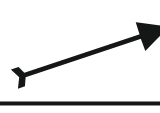
A4. α) Λ, β) $\rightarrow \Sigma$, γ) $\rightarrow \Lambda$, δ) Σ, ε) $\rightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

B1 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως ρητή.

$$f(x) = \left(\frac{x}{x^2+1} \right)' = \frac{(x^2)' \cdot (x^2+1) - x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x \cdot (x^2+1) - 2x^3}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f			
Τοπ. Ελάχιστο $f(0)=0$			

Έτσι προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 0, το $f(0)=0$.

B2.
$$f''(x) = \left(\frac{2x}{(x^2+1)^2} \right)' = \frac{(2x)'(x^2+1)^2 - 2x[(x^2+1)']}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{2(x^2+1)^2 - 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)^2 - 8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{(x^2+1)[2(x^2+1) - 8x^2]}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)(2x^2+2-8x^2)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{(x^2+1)(2-6x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)(1-3x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x)}{(x^2+1)^4}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	0	-
$f(x)$	↘		↗	

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1/4 \quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1/4$$

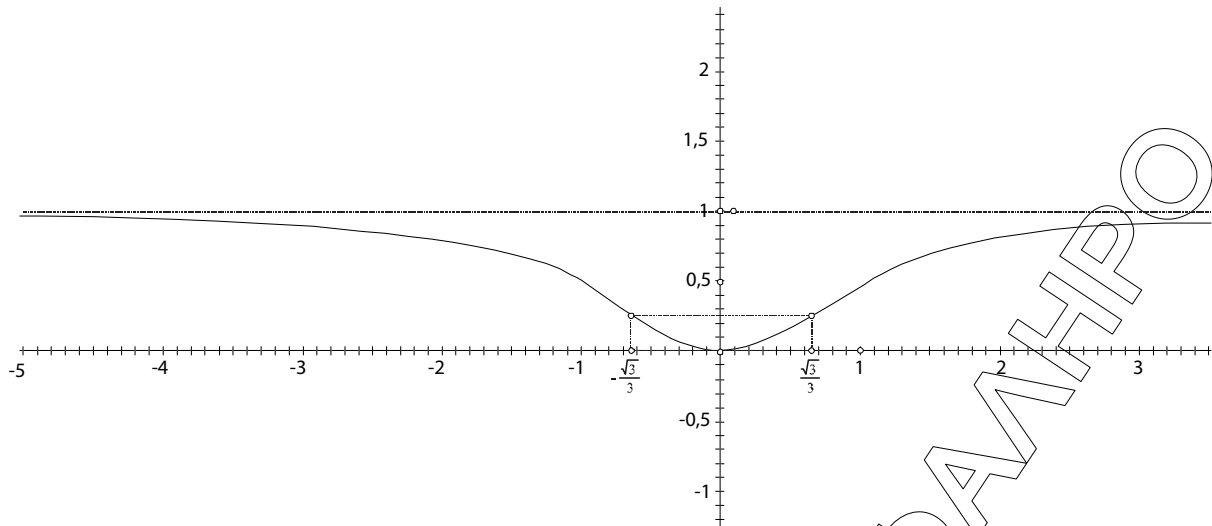
Προκύπτει ότι η f είναι κοίλη στα $(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{3}) \cup [\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$, είναι κυρτή στο $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$,

ενώ παρουσιάζει Σ.Κ. στις θέσεις $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

B3
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=1$ και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

B4



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $K(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$

$$K(0) = e^0 - 1 = 0$$

$$K'(x) = 2x \cdot e^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1), x \in \mathbb{R}$$

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Η συνάρτηση $g(x) = e^x$ είναι αύξουσα στο \mathbb{R} , άρα για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι:

$$x^2 > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > e^0 \Leftrightarrow e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 > 0$$

Έτσι προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
2x	-	0	+
$e^{x^2} - 1$	+	0	+
$K'(x)$	-	0	+
$K(x)$			

Άρα για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι $K(x) > 0$, ενώ $K(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Δηλαδή η εξίσωση $K(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$.

Γ2 Για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$: $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1) \neq 0$, λόγω του ερωτήματος Γ1.

Έτσι η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ και δεν μηδενίζεται σε αυτά, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

• Για $x \in (0, +\infty)$: $(f(x) - (e^{x^2} - x^2 - 1)) \cdot (f(x) + (e^{x^2} - x^2 - 1)) = 0$ (1)

Αν $f(x) > 0$, τότε επειδή $e^{x^2} - x^2 - 1 > 0$, από την (1) προκύπτει ότι

$$f(x) - (e^{x^2} - x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$$

Αν $f(x) < 0$, τότε επειδή το $-(e^{x^2} - x^2 - 1) < 0$, από την (1) προκύπτει ότι

$$f(x) + (e^{x^2} - x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1).$$

• Για $x \in (-\infty, 0)$

Αν $f(x) > 0$, τότε από την (1) $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$

Αν $f(x) < 0$, τότε από την (1) $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$.

Έτσι προκύπτει ότι

α) $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$ ή

β) $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$, $x \in \mathbb{R}$ ή

γ) $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \geq 0 \\ -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x < 0 \end{cases}$ ή

δ) $f(x) = \begin{cases} -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x \geq 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

Γ3. $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1)$$

$$f''(x) = 2e^{x^2} + 2xe^{x^2} \cdot 2x - 2 = 2(e^{x^2} - 1) + 4x^2 \cdot e^{x^2}$$

Προκύπτει ότι $f''(0) = 0$, ενώ επειδή στο ερώτημα Γ1, αποδείχθηκε ότι

$e^{x^2} - 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow (f''(x))' > 0$ στο \mathbb{R}^* , ενώ

$f''(0) = 0$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , άρα f κυρτή.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x+3) - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι $g(x) = f'(x+3) - f'(x) = 3 \frac{f'(x+3) - f'(x)}{(x+3) - x} = 3f''(\xi)$,

όπου $\xi \in (x, x+3)$.

Άρα $g'(x) > 0$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$, λόγω του Γ3.

Η $g(x)$ επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, άρα και 1-1.

Η δοθείσα εξίσωση τώρα γράφεται $g(|\eta\mu x|) = g(x)$.

Αφού είναι 1-1, προκύπτει ότι $|\eta\mu x| = x$, $x \in [0, +\infty) \Leftrightarrow |\eta\mu x| = |x|$, $x \in [0, +\infty)$.

Η ισότητα αυτή ισχύει μόνον όταν $x = 0$ (σχολικό βιβλίο σελ. 170).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \cdot \eta\mu x \, dx = \pi &\Rightarrow \int_0^{\pi} f(x) \cdot \eta\mu x \, dx + \int_0^{\pi} f''(x) \cdot \eta\mu x \, dx = \pi \Rightarrow \\ \int_0^{\pi} f(x) \cdot (-\sigma\upsilon\nu x)' \, dx + \int_0^{\pi} (f'(x))' \cdot \eta\mu x \, dx &= \pi \Rightarrow \\ \Rightarrow -[\sigma\upsilon\nu x \cdot f(x)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu x \cdot f'(x) \, dx &= [f'(x) \cdot \eta\mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx = \pi \Rightarrow \\ \Rightarrow f(\pi) + f(0) &= \pi \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \eta\mu x \right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Αφού f συνεχής στο $x = 0 \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Δηλαδή $f(0) = 0$.

Άρα από (1) $\Rightarrow f(\pi) = \pi$.

$$\text{Έχουμε } \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{1}{\frac{x}{\eta\mu x}}, \quad x \neq 0.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{1}{\frac{x}{\eta\mu x}} \right) = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$$

Δηλαδή $f'(0) = 1$.

Δ2 α) Από την σχέση $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ παραγωγίζοντας έχουμε

$$e^{f(x)} f'(x) + 1 = f'(f(x)) f'(x) + e^x \quad (2)'$$

Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε από Θ.

$$\text{Fermat } f'(x_0) = 0 \quad (3)$$

Από (2) για $x = x_0$ έχουμε:

$$e^{f(x_0)} f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) f'(x_0) + e^{x_0} \Rightarrow e^{x_0} = 1 \Rightarrow x_0 = 0.$$

Επομένως θα είναι $f'(0) = 0$, άτοπο διότι $f'(0) = 1$.

Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

β) Αφού η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο \mathbb{R} και είναι παραγωγίσιμη θα είναι $f'(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Όμως η f' είναι συνεχής αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $f'(0) = 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή η f είναι αύξουσα στο \mathbb{R} .

Δ3. Αφού f συνεχής και γνησίως αύξουσα θα έχει σύνολο τιμών το

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right).$$

Όμως $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\text{Έχουμε } \left| \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right| = \frac{|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|} \leq \frac{|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|} \leq \frac{2}{|f(x)|}$$

και αφού f αύξουσα, για $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0$.

$$\text{Έτσι } \left| \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right| \leq \frac{2}{f(x)} \Leftrightarrow -\frac{2}{f(x)} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{f(x)} = 0$ αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{f(x)} = 0$.

Άρα από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$.

Δ4. Θέτω $\ln x = u \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot dx = du$

Για $x = 1 \Rightarrow u_1 = \ln 1 = 0$

Για $x = e^\pi \Rightarrow u_2 = \ln e^\pi = \pi$

$$\text{Έτσι } \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^\pi f(u) du$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $0 < \int_0^\pi f(u) du < \pi^2$ (1)

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi] \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(\pi)$

(η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \pi$ και για $x = 0$)

$$\Rightarrow f(x) \leq \pi \Rightarrow \pi - f(x) \geq 0, x \in [0, \pi] \Rightarrow$$

$$\int_0^\pi (\pi - f(x)) dx > 0 \text{ (γιατί η } \pi - f(x) \text{ δεν μηδενίζεται παντού στο } [0, \pi]) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \pi dx - \int_0^{\pi} f(x) dx > 0 \Rightarrow \pi^2 > \int_0^{\pi} f(x) dx \quad (2)$$

$$\text{Ομοίως } f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow \int_0^{\pi} f(x) dx > 0 \quad (3)$$

Από (2), (3) $\Rightarrow 0 < \int_0^{\pi} f(x) dx < \pi^2$ δηλαδή ισχύει η (1).

ΑΓ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ - Γ. ΜΑΘΕΙΝ ΦΑΛΗΡΟ